Vorlesung 1b

Wahrscheinlichkeit von Kollisionen

bei der wiederholten rein zufälligen Wahl

aus endlich vielen möglichen Ausgängen

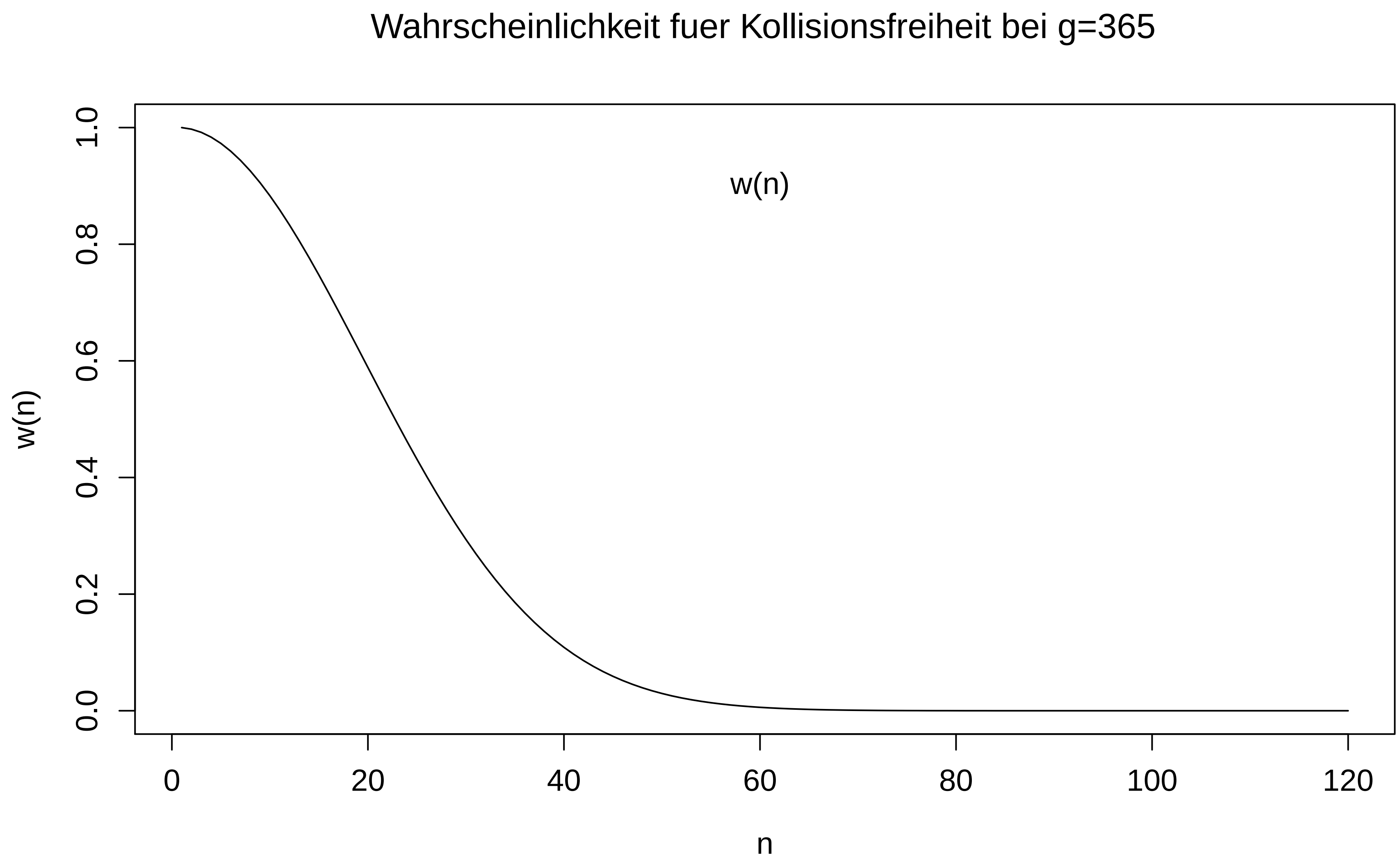
(Buch S. 1-5)

Teil Zwei:

Approximationen

der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

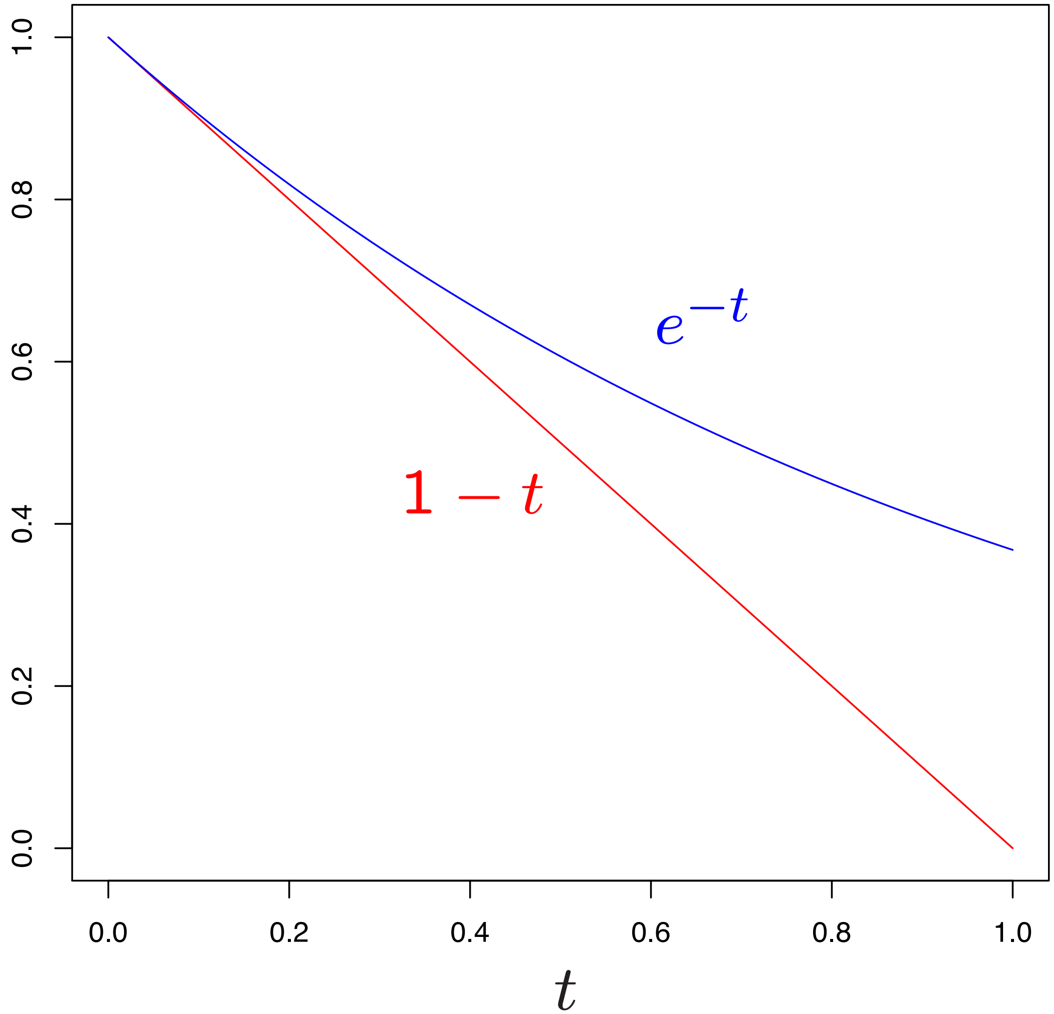
$$w(n, g) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g}\right)$$



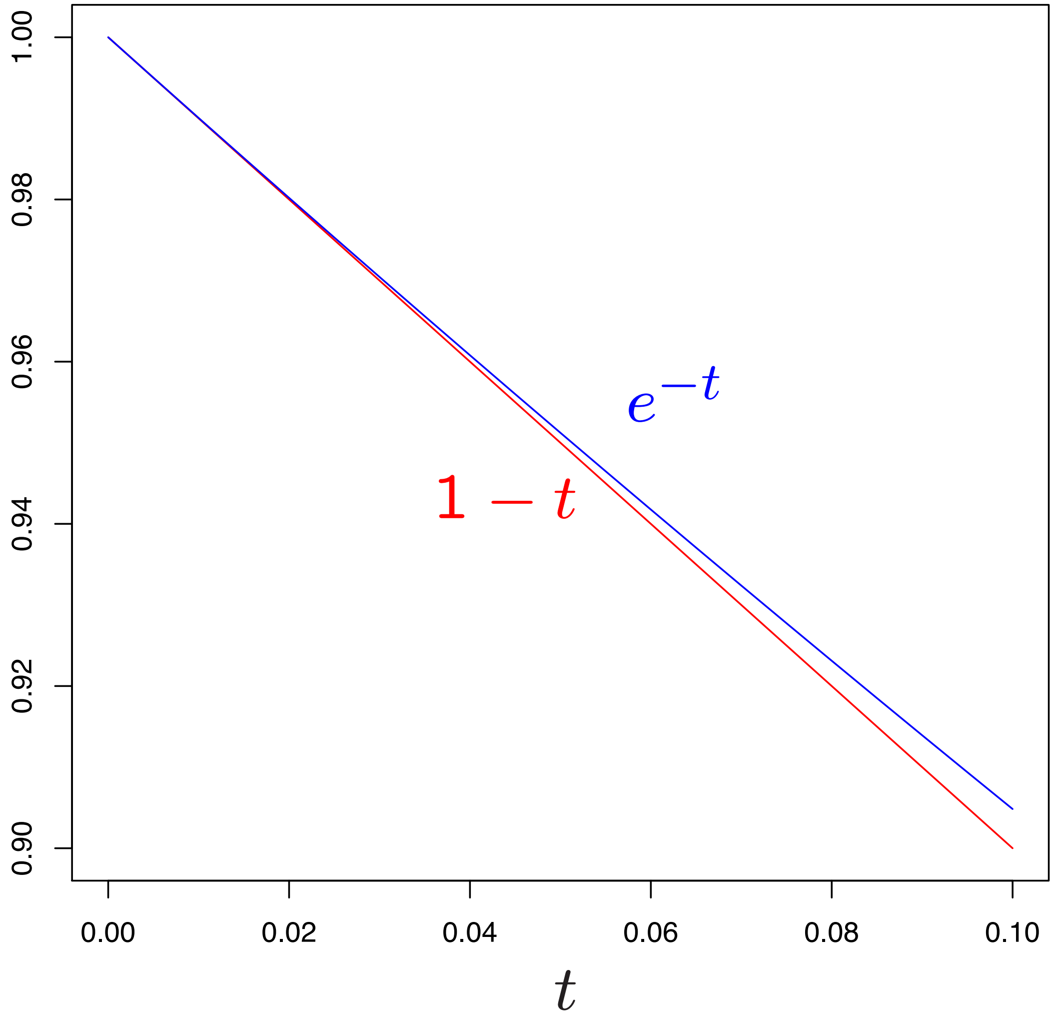
Wahrscheinlichkeit fuer Kollisionsfreiheit bei g=365
w(n)
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
20
40
60
80
100
120
n
w(n)

1. Approximation über die Linearisierung von $\exp$

für $0 \leq t \leq 1$:



für $0 \leq t \leq 0.1$:



Lokale lineare Approximation von $t \mapsto e^{-t}$ bei $t = 0$:

$$e^{-t} = 1 - t + o(t) \qquad \text{für } t \to 0.$$

Dabei ist der Term $o(t)$ *von kleinerer Ordnung als* t, d.h. $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

Salopp geschrieben:

$$e^{-t} \approx 1 - t \qquad \text{für kleine } t.$$

Damit bekommen wir für kleines $\frac{n}{g}$ die Approximation

$$w(n,g) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{g}\right) \approx \prod_{i=1}^{n-1} \exp\left(-\frac{i}{g}\right)$$

$$= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{g}\right) = \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2g}\right).$$

Also für kleines $\frac{n}{g}$, d.h. für $n \ll g$:

$$w(n, g) \approx \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2g}\right) \ .$$

Gibt es auch eine Näherungsformel,

die brauchbar ist für alle $n < g$?

In der Tat!

2. Die Stirling-Approximation

(Buch S. 4-5)

$$w(n,g) = \frac{g(g-1)\cdots(g-(n-1))}{g^n}$$

$$= \frac{g(g-1)\cdots(g-(n-1))}{g^n}\frac{(g-n)(g-n-1)\cdots 1}{(g-n)(g-n-1)\cdots 1}$$

$$w(n,g) = \frac{g!}{g^n(g-n)!}$$

mit $k! := 1 \cdot 2 \cdots k$, lies: k-Fakultät

Die Stirling-Formel:

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\, \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$k! \approx \sqrt{2\pi\, k}\; \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

$$\frac{g!}{g^n (g-n)!} \approx \frac{1}{g^n}\sqrt{\frac{g}{g-n}}\;\frac{g^g}{(g-n)^{g-n}}\;\frac{e^{g-n}}{e^g}$$

$$= \sqrt{\frac{g}{g-n}}\, e^{-n} \left(\frac{g}{g-n}\right)^{g-n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}}\, e^{-n}\left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

$$\frac{g!}{g^n(g-n)!} \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}}\, e^{-n} \left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

Wir formen jetzt den Ausdruck

$$e^{-n} \left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g}$$

weiter um. Ein Trick dabei ist es,

$$\left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g} \quad \text{als} \quad \exp\left((n-g)\ln\left(1-\frac{n}{g}\right)\right)$$

zu schreiben

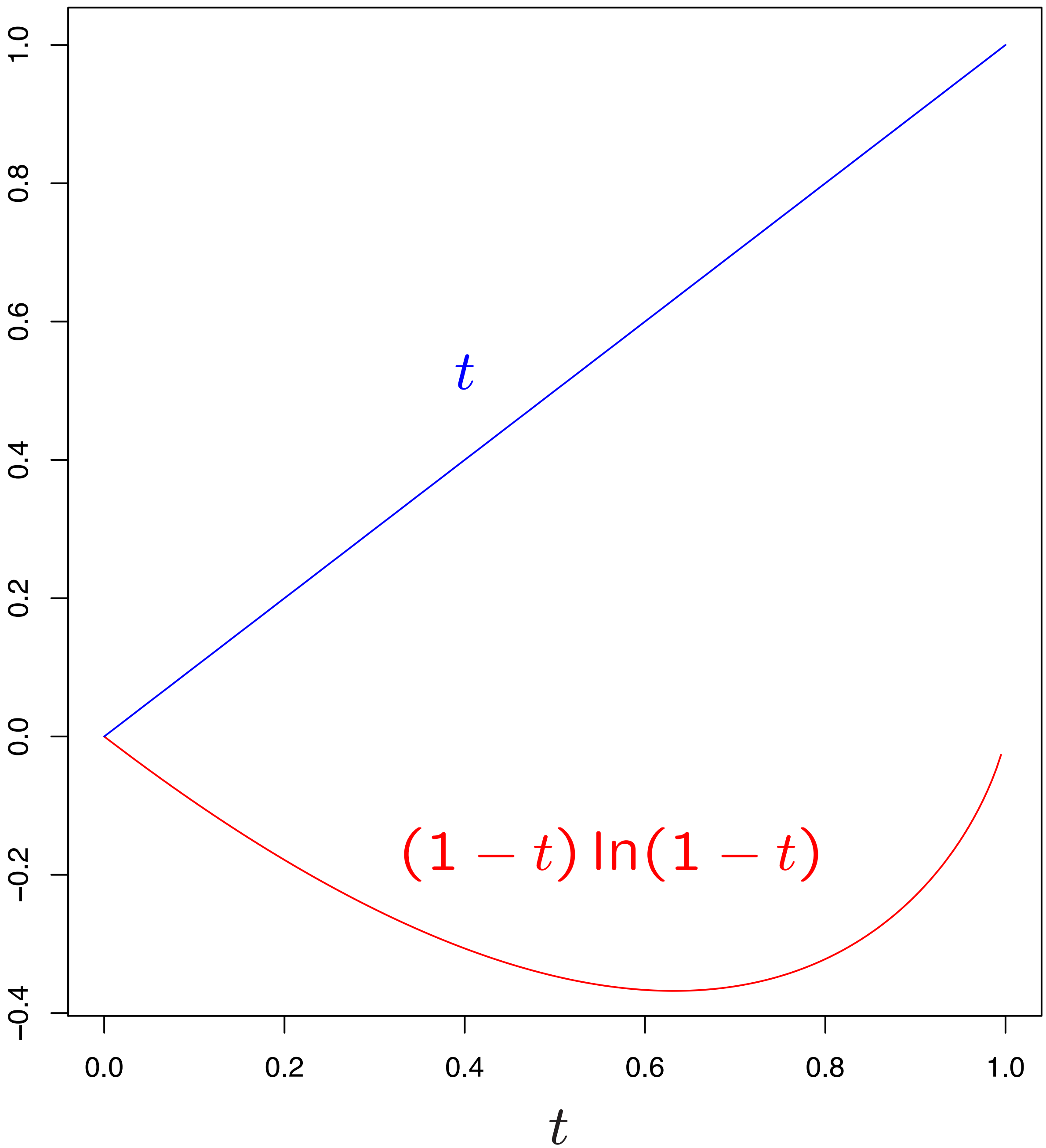
und dann die Beziehung $e^a e^b = e^{a+b}$ zu verwenden:

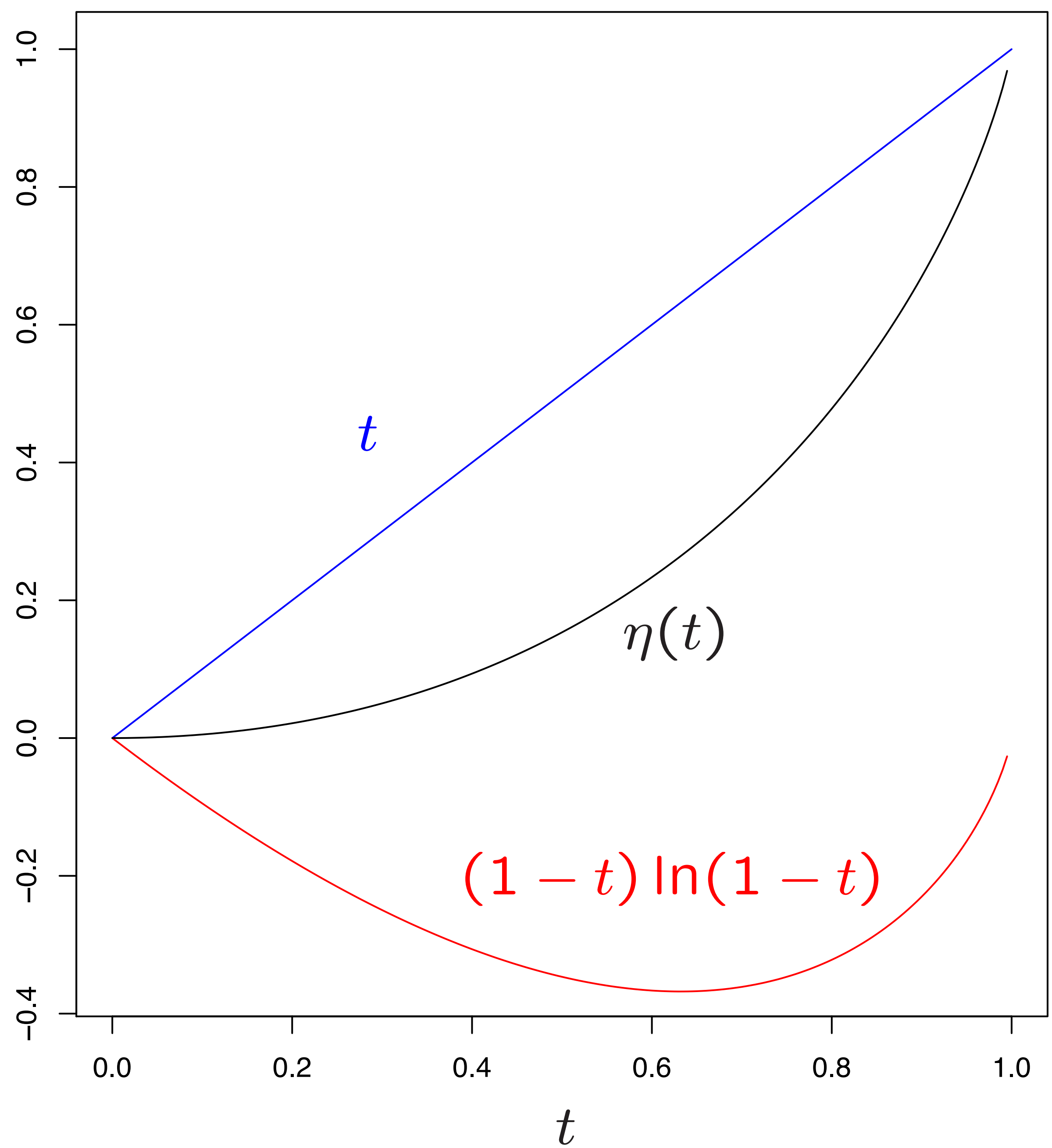
$$e^{-n}\left(1-\frac{n}{g}\right)^{n-g} = \exp\left(-n+(n-g)\ln\left(1-\frac{n}{g}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-g\left(\frac{n}{g}+\left(1-\frac{n}{g}\right)\ln\left(1-\frac{n}{g}\right)\right)\right)$$

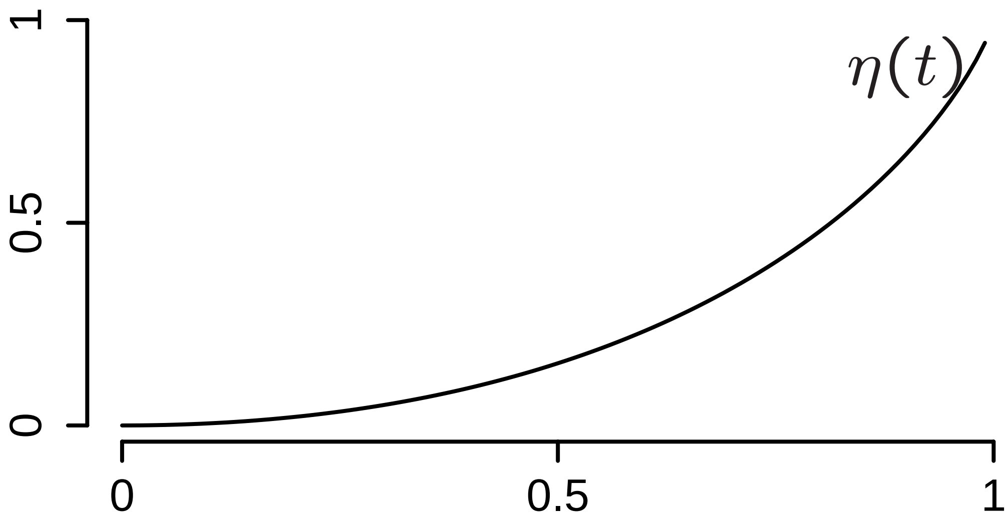
$$= \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

mit $\quad \eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$


t
$(1-t)\ln(1-t)$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−0.2
−0.4
t
$\eta(t)$
$(1-t)\ln(1-t)$
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
t

$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$

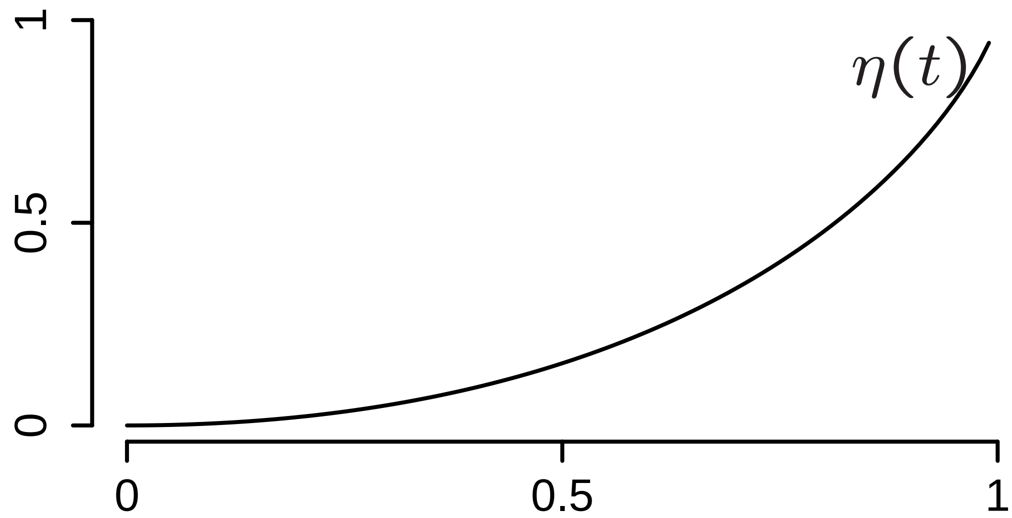


$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

Stirling-Approximation

der Wahrscheinlichkeit für Kollisionsfreiheit

$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$



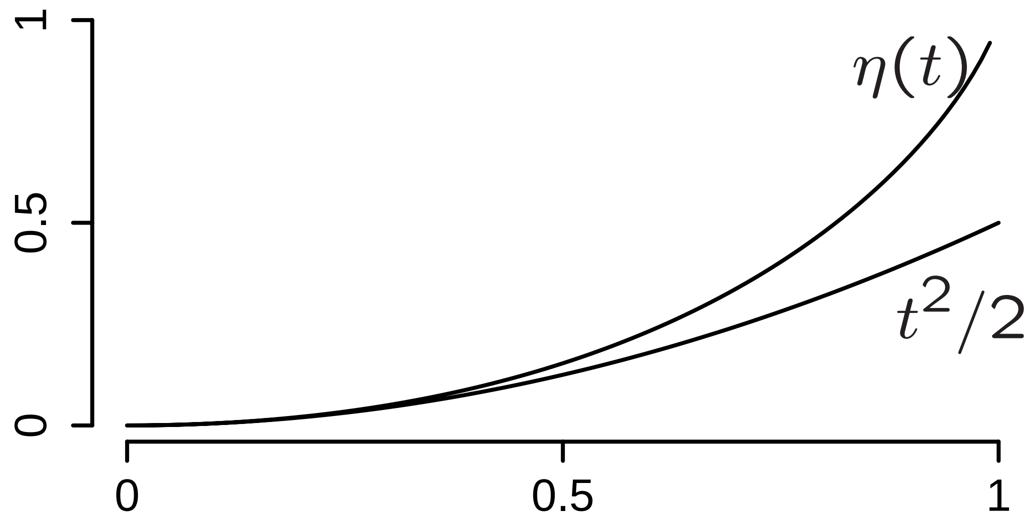
$$w(n,g) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right)$$

Die Folien 19 bis 23 wurden in der Vorlesung nicht besprochen. Ihre Lektüre ist für das Weitere nicht notwendig, kann aber (auch in der Remeinszenz an Mathe 1 und 2) genüsslich sein.

Für $n \ll g$, also $t := \frac{n}{g} \ll 1$,
können wir

(i) $\eta(t)$ quadratisch um $t = 0$ approximieren
und
(ii) den Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}}$ mittels $e^{-t} \approx 1 - t$ approximieren:

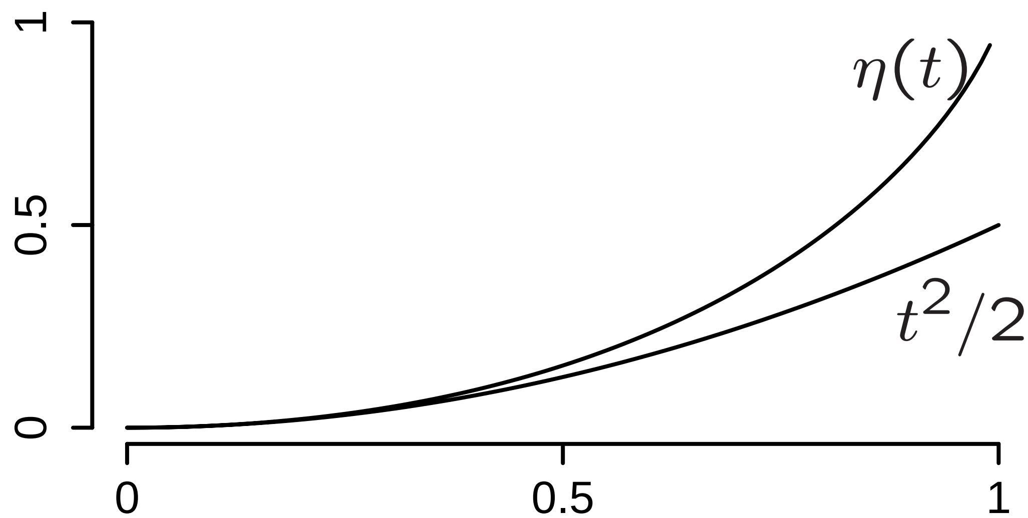
$$\eta(t) := t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \le t \le 1.$$



$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} - \cdots$$

$$(1-t)\ln(1-t) = -t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ für } t \to 0$$

$$\eta(t) = \frac{t^2}{2} + o(t^2) \text{ für } t \to 0$$



$\frac{1}{2}t^2$ ist die quadratische Approximation von $\eta(t)$ um $t = 0$.

Für $n \ll g$ (wie z. B. für $n = 25$, $g = 365$) ist also

$$\eta\left(\frac{n}{g}\right) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n}{g}\right)^2.$$

Jetzt zum Vorfaktor $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2} \approx (e^{-t})^{-1/2} = e^{t/2}.$$

Insgesamt ist also für kleine t

$$\frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-g\eta(t)} \approx e^{t/2} e^{-gt^2/2}$$

Für $t := \frac{n}{g} \ll 1$ ergibt sich die Stirling+Taylor-Approximation:

$$w(n,g) \approx \exp\left(\frac{n}{2g}\right) \exp\left(-\frac{n^2}{2g}\right) = \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right)$$

Man beachte:

Die Stirling+Taylor Approximation

$$\mathbf{P}(X \in A) \approx \text{exp}\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right)$$

ist identisch mit der

Approximation über die Linearisierung von exp.

Im Buch haben wir hier den Faktor $\sqrt{1 - n/g}$
in der Stirling-Approximation vernachlässigt, d.h. gleich 1 gesetzt.
Dadurch erhielten wir im Buch die etwas weniger genaue Näherung

$$w(n,g) \approx \text{exp}\left(-\frac{n^2}{2g}\right).$$

Fazit:

Für $n < g$ ist $\quad w(n,g) \approx \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\dfrac{n}{g}\right)\right)$

mit $\eta(t) = t + (1-t)\ln(1-t), \qquad 0 \leq t \leq 1$

(Stirling-Approximation).

Für $n \ll g$ ist $\quad w(n,g) \approx \exp\left(-\dfrac{n(n-1)}{2g}\right)$

(Approximation über die Linearisierung von exp)

Für $n^2 \ll g$ ist $\quad w(n,g) \approx 1.$

Beispiel: $n = 25, g = 365$:

$$\mathbf{P}(X \in A) = \frac{g(g-1)\cdots(g-n+1)}{g^n} = 0.431300$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{n}{g}}} \exp\left(-g\,\eta\left(\frac{n}{g}\right)\right) = 0.431308$$

$$\exp\left(-\frac{n(n-1)}{2g}\right) = 0.4396$$